Research Paper Series No. 00002

ファイナンスの数理

赤堀　次郎

April. 2000

Research Center for Finance
Ritsumeikan University
Shiga 525-8577 Japan
TEL +81(77)561-2801
FAX +81(77)561-3955
www.finance.ritsumei.ac.jp

立命館大学
ファイナンス研究センター
〒525-8577(固有郵便番号)

ファイナンスの数理

赤堀 次郎
立命館大学理工学部
〒 525-8577 滋賀県草津市野路東 1-1-1
e-mail: akahori@se.ritsumei.ac.jp

December, 1998
(revised April, 2000)

1　金融派生商品 (derivetives)

1.1　デリバティブとは？

・債券・株式・通貨・商品などの原資産に対し，その商品から派生した商品

・「価格がより基本的な他の変数（原資産）の値によって定められる商品」(Hull, J., Options, Futures, and Other Derivatives [9] :邦訳 「フィナンシャル・エンジニアリング{デリバティブ商品開発とリスク管理の基礎」東京三菱銀行商品開発部 訳, 金融財政事情研究会, 1998.)

・contingent claim (条件付き請求権) ともいう．

1.2　デリバティブの種類

一口にデリバティブといってもさまざまな種類がある．代表的で一般にもよく知られているのは先物（futures），オプションなどであろう．実際には金利ものをふくめて無数の variation が考えられ，その種類は無限にあるといっても過言ではない．また，原資産が何であるか，pay-o®

がどのように与えられるか，有効な期間の長さがどれくらいであるか，などによってその性質は大きく変化する．

1.2.1　一般的な分類（取引数の多い主なデリバティブ）

・先物 (futures, forward など)
・スワップ (などの金利もの）
・オプション（ヨーロッピアン，アメリカンなど）

これらのデリバティブは特に現在市場において活発に取引されている代表的なものである．先物は金や銅などの金属，砂糖やトウモロコシなどの農産物，株価指数などの上に書かれたものがよく知られている．オプションはやはり指数，為替などの上に書かれたものがよく取引されているようである．

1.2.2　理論上の分類

　数理ファイナンス[1]の理論においては，なるべくこれらの豊富な variation を統一的にあつかうため，その pay-o® のありかたによって分類する．

・先物（futures, forward)
・ヨーロピアンタイプ
・アメリカンタイプ
・上記以外

なお，アジア型とか，エキゾチック型と呼ばれるものはここではヨーロピアンタイプに分類される[2]. (実際の市場ではアメリカン型であることが多い.）また，これらのうちとくにアメリカンタイプと呼ばれるものは数学的扱いが容易ではない[3].

---

[1]多岐にわたる金融派生商品に関する理論のうち，とくに数学的側面の強いものを最近では数理ファイナンス (mathematical ¯nance) と呼び，ほかのアプローチの方法に基づく理論たちと区別する．

[2]このことについては 10 月 28 日の講座において解説する

[3]このことについては 11 月 4 日の講座においてあつかう

1.2.3　そのほか区別すべき指標

　まず，そのデリバティブが
・取引所
でとりひきされるか，
・相対
で取引されるかによってその性質は大きく変わってくる．(理由は後述)
またその行使日までが，
・短期（3ヶ月程度）であるか
・長期（3 年，5 年など）
であるかによっても性格が変わってくる．とくに後者は金利の（ランダムな）変動の影響が無視できなくなる．
さらに，最も基本的であるが，原資産が何であるか，ということもその商品の性質を決定づける．

おおざっぱにいってこれらの違いと，1-2-2 の pay-o® の違いを組み合わせることによってさまざまな variation のデリバティブが構成される．

例 1：pay-o®{ヨーロピアン，原資産{債券，取引形態{相対 ··· キャップレット
例 2：pay-o®{先物型，原資産{株式指数，取引形態{取引所 ··· インデックス先物

など．

1.3　デリバティブ購入の目的

　大きく分けて,「投機目的」と「ヘッジ目的」に分かれる．さらに加えて「裁定目的」の市場参加者もいる.「投機目的」の市場参加者は，リスクをとることによって利益をあげようとし，逆に「ヘッジ目的」の参加者はリスクを軽減することを目的として，デリバティブを購入/売却する．また,「裁定目的」の参加者はデリバティブなどのミスプライスを利用して，リスク無しで利益をあげようとする．(cf. Du±e, D., Futures Market [5, chapter 5] ：邦訳「フューチャーズマーケット{先物市場」 農林中金総合研究所 訳, 金融財政事情研究会, 1994.)

また，いわゆる「リスク」には原資産の固有のリスクのほかに，市場全体から発生する「市場リスク」[4]，倒産などによる契約不履行の「信用リスク」に分けて考えることが，実務家の間では一般的になっている[5]．市場リスクはたとえば指数オプションなどでヘッジされ，信用リスクは「クレジットデリバティブ」と呼ばれる商品によってヘッジされると考えられる．(cf. Hull, J., [9])

1.4　デリバティブの時価評価

デリバティブの価格を見積もるための基本的な考え方は,（原価ではなく）「時価」（または現在価値：present value）を評価する，ということである．たとえば現時点での 1 億円と 1 年後の 1 億円は金利が 0 でないかぎり同価値ではない．現時点の 1 億円は年利 r

この考え方を一般化すると

$$(\text{現在価値}) = \frac{(\text{将来価値})}{(\text{割引率})} \tag{1.1}$$

ということになる．ただしここで「割引率」は主に金利の水準によってきまる数である．たとえば利率 r で連続複利で配当があると理想化すれば,

$$(\text{割引率}) = e^{r\,(\text{時間})} \tag{1.2}$$

によって与えられる．

しかし多くの場合,「将来価値」は不確定なもの[6]であるから，(1.1) で与えられる式は不十分である．結果を先に述べると，数理ファイナンスの基本定理 [4], [7], [8], によれば，おおざっぱにいって「将来価値」を割り引いたものを「同値マルチンゲール測度」と呼ばれる確率で期待値（平均）をとったものが「現在価値」であるといえる[7]．これをあいまいさなしで記述するにはかなりの準備が必要なので割愛する．以下では具体的

---

[4]「市場リスク」は CAPM などのポートフォリオ選択理論で自然に導入される．

[5]近年ではこれらに加えて「流動性リスク」というものを考慮しようという動きがある.「流動性リスク」とは，商品を取り引きしたいときに必ずしもできない，というようなリスクの総称であると考えればよい．

[6]割引率，あるいは金利そのものが不確定であると考えなければならない場合も少なくない．

[7]アメリカンタイプの場合事情は多少ことなる．

なデリバティブの性質を議論し，その中でその背後にある数理的性質を垣間みていくことにする．

2　先物市場

2.1　先物・先渡し契約とは？

「先物（先渡し）」とは何らかの原資産（なんらかのデリバティブの価格であってもよい．）の上（「先物」に対して「現物」と呼ぶ）に書かれた契約で，将来のある時点に現時点で約定した価格で現物を購入することを義務づけるものである．先渡し (forward) が相対で取引されるのに対して，先物 (futures) は取引所における取引である．この後者の特徴が先物の見かけ，ひいては本質，を先渡しとはまったく異なるものにする．しかし理論上は金利が確定的 (non-randam) であれば両者は契約として等価なものになる．このセクションではこれらの事実を検討する．

2.2　先渡し契約

2.2.1　オプションとの対比

先渡し契約とオプションは極めてよく似ているが，オプションが**権利**なのに対して先渡し契約は**義務**である．またオプションには契約時点において**「プレミアム」**が支払われる/受け取れるのに対し，先渡し契約の契約時点での**価格（時価）は0**である．

先渡しの場合，は時価を0にするような行使価格を求めることが問題となる．

2.2.2　先渡し契約の公正 (行使) 価格の求め方

時刻 t での現物の価格 S_t が以下の確率微分方程式で与えられるものとする．

$$dS_t = \text{¾} S_t dW_t + \text{¹} S_t dt; \quad \text{¹}; \text{¾} > 0 \text{ は定数};\ W_t \text{ は Wiener 過程}: \tag{2.1}$$

このとき，行使日 $T(>t)$，行使価格 K のヨーロピアン・コールオプションの t 時点での価格（現在価値）c は，

$$c = e^{-r(T-t)}\hat{E}_t[\max(S_T - K, 0)]. \tag{2.2}$$

で与えられる[8]．ただしここで $r(>0)$ は金利，$\hat{E}_t$ はある疑似確率 $\hat{P}$（同値マルチンゲール測度）による（条件付き）平均をあらわす．つまり $\hat{P}$ の下では

$$\log S_T \sim N\left(\log S_t + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)(T-t), \sigma\sqrt{T-t}\right) \tag{2.3}$$

となる．
先渡し契約の場合，(2.2) において，[ ] の中が $S_T - K$ になり，$c = 0$ でとなる K を求めるのであるから，結局

$$K = e^{r(T-t)}\hat{E}_t[S_T]. \tag{2.4}$$

を得る．

2.3 先物契約

先渡し契約は相対取引であるので受け手もしくは「買い手」が資産不足などの理由で契約が履行されない場合の保証がない（デフォルト・リスク）．これに比べて先物契約は取引所が契約の履行を保証する．

2.3.1 保証金制度

先物契約を約定した投資家は取引所の定める「当初証拠金（initial margin)」を取次業者（ブローカー）に拠出する．そして毎日の市場における「先物価格」の変動にあわせて値洗い（marking to market）と呼ばれる操作により，証拠金に取次業者より追加分が支払われたり，不足分が引き出される．証拠金残高が維持証拠金 (maintenance margin) と呼ばれる水準を下回ると，追加証拠金を入れることが要求されるが，それが実行されなかった場合，契約は強制的に反対取引と相殺される．こうして

[8] 数理ファイナンスの基本定理．あらゆるまともな教科書には書いてあるであろう．

先物契約は契約不履行のリスクを軽減している．また，先物契約の場合，通常現物との交換の期日までに契約は相殺される．

また，証拠金は当初証拠金を上回る分はいつでも引き出すことができる．その利益を別の方法で運用することができるが，ここに先渡し契約との違いが生ずる余地がある．しかし金利が一定の場合，実は両者は一致する．「両者」というのは先渡し行使価格と，先物「価格」のことである．

2.3.2 先物価格と先渡し契約の行使価格の一致

ここでは，利子率が一定ならば先物価格と先渡し契約の行使価格が一致することをしめす．[9]

いま現時点から 時点 T までの n 日間の先物契約を考える．第 i 日の先物価格の終値を $F_i;\ i = 0, 1, \ldots, n$ とし，1 日を 1 単位とする利子率を r として以下の「戦略」を考える．

1. 第 0 日の終わり（スタート時）に e^r の先物を購入する．
2. 第 i 日の終わりまで $(i = 1, \ldots, n)$ に e^{ir} まで先物契約の数を増やす．

すると第 i $(i = 1, \ldots, n)$ 日の損益 Δ_i は

$$\Delta_i = (F_i - F_{i-1})e^{ir} \tag{2.5}$$

となる．

3. そこでこの損益を利子率 r で第 n 日の終わりまで複利で運用する．

その損益 (Δ_i) は第 n 日までには

$$e^{(n-i)r}\Delta_i = (F_i - F_{i-1})e^{nr} \tag{2.6}$$

になっているであろう．よってこの「戦略」1〜3 の第 n 日までの合計の損益は

$$\sum_{i=1} (F_i - F_{i-1})e^{nr} = (F_n - F_0)e^{nr} \tag{2.7}$$

[9] このセクションの内容は [9, appendix 3A] に大きく拠っている．

となる．ところが，第 n 日には先物価格と現物価格 $=: S_T$ は一致しているから，結局合計は $(S_T - F_0)e^{nr}$ となる．そこでさらに

4. 第 0 日から時点 T まで金額 F_0 を利子率 r で運用する．

という戦術を加えると,「戦術」1〜4 の第 n 日 $=$ 時点 T での総価値は

$$F_0e^{nr} + (S_T - F_0)e^{nr} = S_Te^{nr} \tag{2.8}$$

となる．先物の契約に初期投資は不要なので，結局この「戦術」1〜4 によって F_0 の初期投資によって 時点 T に S_Te^{nr} を受け取ったことになる．

一方，第 0 日の終わりの T を行使日とする先渡し契約の行使価格を G_0 とする．ここでは次のような戦術を採用する．

i) 第 0 日から時点 T まで金額 G_0 を利子率 r で運用する．
ii) 第 0 日に e^{nr} 単位の 先渡し契約を約定する．

するとこの 戦術 i),ii) によっても G_0 の初期投資によって 時点 T に S_Te^{nr} を受け取ったことになる．この反対取引を考えることによって，**裁定機会がない**ことを仮定しておけば

$$F_0 = G_0 \tag{2.9}$$

を得る．

一般に金利がランダムに変動する場合[10]，先物価格と先渡し価格は一致しない．これについては拙論文 [15] などを参照していただきたい．

2.4 先物によるヘッジ

ある会社が将来の特定の時期に原資産を売却（resp. 購入) しなければならないとき，先物の売りポジション (resp. 買いポジション) によって原資産の価格変動によるリスクをヘッジすることをショートヘッジ (resp. ロ

[10] 金利に関係する先物の場合，変動が無視できない．また長期にわたる契約の場合も金利の変動を考慮にいればければならない

ングヘッジ) という．原資産の価格が下落すると，原資産の売却によって「損害」がでるが，先物の売りポジションでは利益が出ているので，うまく相殺できるはずである．ここでは原資産の先物が市場に存在しないような場合も視野にいれつつ，このヘッジをある意味で最適にすることを考える．

2.4.1　分散最小戦略

　まず，以下のような記号を導入する．

¢S : 現物価格 =: S のヘッジ期間内の変化の幅
¢F : 先物価格 =: F のヘッジ期間内の変化の幅
$¾_S$: ¢S の標準偏差
$¾_F$: ¢F の標準偏差
½ : ¢S と ¢F の相関係数
h : ヘッジ比率:= 現物 1 単位に対する先物の保有量

いま期間の幅は任意としておく．ショートヘッジの場合の損益 ¢µ は

$$¢µ = ¢S \ ¡ \ h¢F: \qquad (2.10)$$

で与えられ，その分散 V[¢µ] は

$$V[¢µ] = ¾_S^2 + h^2¾_F^2 \ ¡ \ 2h¾_S¾_F: \qquad (2.11)$$

となる．いまさらにここで $¾_S$, $¾_F$ が定数であると仮定すると

$$\frac{@V}{@h} = 2h¾_F^2 \ ¡ \ 2½¾_S¾_F \qquad (2.12)$$

であり，$\frac{@^2V}{@h^2} = 4h½ > 0$ であることより V を最小にする h は

$$h = ½\frac{¾_S}{¾_F} \qquad (2.13)$$

で与えられる．

3 エキゾチックオプション

権利行使日が満期にかぎられるヨーロピアン（コール/プット）オプション（Black-Scholes 公式で価格が与えられる) に対し，権利行使を (満期以前ならば) いつでもできるものをアメリカンタイプと呼ぶのであった．これら代表的なオプション以外のオプションを特に「エキゾチック」型と呼ぶことがある．その多くは pay-o® がより複雑なものであったり，原資産自身の上に書かれるのではなく，原資産の定める別の変数の上に書かれたオプションである．そのほとんどは，オーダーメイド，すなわち相対取引である．(cf.Hull, J., [9, chapter 18])

3.1 代表的エキゾチックオプション

・コンパウンドオプション | あるオプションの価格を原資産とするオプション．

・ルックバックオプション | 原資産の期間中の最大値や最小値 (と原資産) の上に書かれたオプション．

・バリアーオプション | ノックアウト型，ダウン・アンド・イン/アウト型などとも呼ばれる．原資産価格が期間中にある定められた価格に到達するか否かに pay-p® が依存する．大抵はある値（バリアー）を超えるとオプションの権利が消滅する．

・エクスチェンジオプション | ある資産と別の資産を交換するオプション．

・アジア型オプション | 原資産の期間中の時間平均（幾何平均と算術平均がある）の上に書かれたオプション．通常のヨーロピアンオプションに比べて安くなる．(これについては後述する．)

このほかにも無数の variation のエキゾチックオプションがある．また，いわゆる金融新商品はすべてエキゾチックオプションに分類するのが通常である．その度に価格/ヘッジ戦略の計算をしなければならないが，その統一的扱いを可能にするのが前節触れた「同値マルチンゲール」の手法である．理論的にはこの手法によってすべて計算が可能になるが，実

際上，対応する微分方程式を具体的に解くことはかなり難しい．とくに金利に関係するエキゾチックオプションは数値的に解くことは一般に難しいが，その場合,「格子近似」と呼ばれる計算法が用いられる.「格子近似」については次回の講座で扱う予定である．

4　Black-Scholes 公式の検討

このセクションでは Black-Scholes 公式を再検討する．そして次のセクションでこの公式の考え方をどこまでエキゾチックオプションの価格づけに応用できるかを考える．

4.1　さまざまなダイナミックヘッジ

ダイナミックヘッジとは,（オプションのヘッジの場合）債券と原資産の保有量を短い時間ごと，たとえば毎日，変えていくヘッジ戦略のことである．Black-Scholes 公式の精神からは，デルタヘッジと呼ばれる戦略を採用することが要求されるが，これはどの程度妥当なのであろうか．ここでは 3 種類の「ヘッジ方法」を比較することによって Black-Sholes 公式の意味を考えてみる．(cf.Hull, J., [9, chapter 14]) なお，以下ではコールオプションについてのみを考慮の対象とする．

4.1.1　naked position と covered position

第一の選択肢は「何もしない」ということである．これは naked position と呼ばれる「戦略」である．オプションが行使される局面では大損害であるが，行使されない局面ではプレミアムを受け取っている分だけの利益がでる．第二の選択肢は，オプションの契約と同時に原資産を必要分だけ購入するという戦略である．これは covered position と呼ばれる．この戦略の損益は，naked position の逆になる．オプションが行使されない局面では，例えば原資産の価格が大きく下落したような局面であるが，この戦略はおおきな損失を生んだことになる．これはリスクを「ヘッジ」しているとはまったくいえない．結局のところ，リスクをそのまま移動させたにすぎない．

4.1.2 Stop-Loss, Start-Gain

第三の選択肢は Stop-Loss, Start-Gain と呼ばれる戦略である．これは行使日まえの市場において，原資産が行使価格をこえている局面ではポジションを「cevered」にし，行使価格を下回っている局面ではポジションを「naked」にする，という戦略である．この戦略がもし理想的に実行されれば，つまり，ポジションを変更する際の価格差が 0 であれば，コストはまったくかからない．（あるいは「取引手数料のみがかかる.」）しかし実際にはこの価格差は決して 0 になり得ない．むしろ高く買って安く売る，というように考えることが自然である．

4.1.3 デルタヘッジ

最後の選択肢は Black-Scholes 公式の指定するヘッジ戦略である．これはデルタヘッジと呼ばれる戦略である．原資産の購入量 ¼ は，オプション価格を c，原資産の価格を S とすると，

$$\text{¼} = \frac{@c}{@S} \tag{4.1}$$

で指定される．そしてこのポジションは，オプションを ¡1 単位もつ，つまり売却している，というポジションとあわせると，リスクを 0 にし，非危険資産を運用しているのと同じことになるのであった．この (4.1) は，実は時間とともに変動する値であるから，実際上のポジションをこれに常に一致させることはほぼ不可能である．ある程度の時間間隔をおいて，現実の保有量を (4.1) に一致させていく（これを「デルタニュートラル」にする，という）というのが「デルタヘッジ」戦略である．

4.2 Stop-Loss, Start-Gain とデルタヘッジの比較

それでは Stop-Loss, Start-Gain 戦略とデルタヘッジはどちらが優れているのであろうか．いいかえると，その戦略を構成するのにかかるコストはどちらが安いのであろうか．これに関しては実証分析がもっとも正しい答を出してくれるであろうが，シュミレーションによっては（例えば Hull, J., [9, ¯g.14.1{14.4]) 総じてデルタヘッジを支持する結果が出ている．このことは実は次の「田中の公式」によって説明できる．（ここでは簡単のため，非危険資産の利子率を 0 であるとしているが，これが正

のある値であるときでもほぼ同様である.）

$$\max(S_T - K; 0) = S_0 + \int_0^T 1_{\{S_t > K\}} dS_t + \frac{1}{2} L_T^K. \tag{4.2}$$

ここで，K は行使価格をあらわす定数，L_T^K は局所時間 (local time) と呼ばれる量で，おおざっぱにいって，$S_t = K$ である時間の合計を表す．もし，S が有界変動であればこのような量は決して出てこない．この公式の意味するところは，Stop-Loss, Start-Gain 戦略 (理想的には (4.2) の右辺の第２項であらわされる）によってヘッジできない部分が L_T^K によって表わされるということである．これは次のようにも言い換えられる．

Stop-Loss, Start-Gain 戦略を採用する際，実際上は原資産の購入時と売却時に価格差があると考えるのが自然である．そこで購入時は $K + \delta$ で購入し，売却時は $K - \delta$ で売却すると考えることにする．すると時刻 T までにかかったトータルのコスト $L(\delta)$ は 原資産１単位につき

$$
\begin{aligned}
L(\delta) &= d_\delta^u (K + \delta) - d_\delta^d (K - \delta) && (4.3)\\
&= K(d_\delta^u - d_\delta^d) + \delta(d_\delta^u + d_\delta^d). && (4.4)
\end{aligned}
$$

で表わされる．ただしここで d_δ^u は原資産価格 S が上向きに $(K + \delta)$ をこえた回数，d_δ^d は原資産価格 S が下向きに $(K - \delta)$ をこえた回数である．この (2.4) のうち，$K(d_\delta^u - d_\delta^d)$ はある意味で 0 に収束することが期待されるが，$2\delta(d_\delta^u + d_\delta^d)$ は実は局所時間 L_T^K にある意味で収束することが知られている．(cf. Revuz and Yor [12, p218–219])

局所時間 L_T^K は確率変数であるから，結局これは Stop-Loss, Start-Gain 戦略によっては完全ヘッジが（理想的に）不可能であることを意味している．また逆に，現実の市場において Stop-Loss, Start-Gain 戦略が不効率であれば，ブラウン運動を含めたマルチンゲールで価格変動をモデル化することの妥当性を示しているものと考えられる．つまり有界変動の関数からは決してでてこない局所時間というものが，ある意味で bid-ask スプレッドをよく説明するとも考えられる．(cf. Carr and Jarrow [2])

以上の考察から，デルタヘッジ戦略を採用することが妥当であり，現実にその戦略を採用しないとしても，Black-Scholes 公式の妥当性が明らかになったと考えられる．次のセクションでは 1-1 で紹介したエキゾチッ

クオプションの価格づけのため，Black-Sholes 公式を拡張することを考える．

5　エキゾチックオプションの価格

5.1　コンパウンドオプション

コンパウンドオプションについてもう少し説明すると，これは満期のより長いあるオプションの価格を原資産とするオプションであると考えられる．これに Black-Scholes 公式をあてはめるためには，原資産であるオプション価格そのものの価格変動を確率微分方程式であらわすことを考える．ここでも前々回の山田先生の講義のノートにしたがうことにする．

原資産の t 時点での価格を S_t，コンパウンドオプションの原資産になるオプションの価格を C_t であらわすことにすると，

$$
\begin{aligned}
dS_t &= \mu S dt + \sigma S dW_t; && (5.1)\\
C_t &= f(S_t; t): && (5.2)
\end{aligned}
$$

であった．ここで $\mu; \sigma$ は理想的には $\frac{dS}{S}$ のそれぞれ平均と標準偏差，W は Brown 運動，f は偏微分方程式

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial t} &= -\frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} - rS\frac{\partial f}{\partial S} + rf; && (5.3)\\
f(S_{T_1}; T_1) &= \max(S_{T_1} - K_1; 0): && (5.4)
\end{aligned}
$$

の解である．また，ここで r は非危険資産の利益率，T_1 はコンパウンドオプションの原資産になるオプション（ここではコールオプションであるとした）の満期で，K_1 はその行使価格である．
一方もし同値マルチンゲールの手法がこの場合も適用できるとすると，このコンパウンドオプションの価格 c は同値マルチンゲール測度による期待値

$$
c = e^{-rT_2}\hat{E}[\max(C_{T_2} - K_2; 0)]: \qquad (5.5)
$$

で与えられる．ただしここで $T_2(< T_1)$ はコンパウンドオプションの満期，K_2 はその行使価格である．いま $C_{T_2} = f(S_{T_2}; T_2)$ であるから結局正規分布の積分の計算を 2 回実行すればコンパウンドオプションの価格を知ることができる．

5.2　エクスチェンジオプション

２つの資産を交換するかどうかを行使日にえらべるオプションである．この２つの資産の価格がそれぞれ $S_1; S_2$ で与えられるとすると，pay-off 関数は

$$\begin{aligned}\min(S_1;S_2) &= S_2 - \max(S_2 - S_1;0) && (5.6)\\ \max(S_1;S_2) &= S_2 + \max(S_2 - S_1;0) && (5.7)\end{aligned}$$

であたえられる．同値マルチンゲールの手法を用いるとエクスチェンジオプションの価格 c は行使日を T とすると

$$c = e^{-T}\hat{E}[S_2 \pm \max(S_2 - S_1;0)] \tag{5.8}$$

で与えられる．これを具体的に計算するためには $(S_1;S_2)$ の同時分布を知る必要がある．

5.3　ルックバックオプション

とくに期間中の最小値 S_{min} を行使価格とするオプションを考える．行使日を T として，その pay-off は $\max(S_T - S_{min};0)$ となる．その価格 c は同値マルチンゲールの手法によって

$$c = e^{-T}\hat{E}[\max(S_T - S_{min};0)]: \tag{5.9}$$

によって与えられる．これを具体的に計算するには $(S_T;S_{min})$ の同時分布を知る必要があるが，これはつぎのようにして知ることができる．
いま簡単のため $S_0 = 1$ とし，$X_T := \log S_T$ とおく．$\hat{P}(X_T \in dx; X_{min} \in dy)$ を求める (同値マルチンゲール測度の下での) 同時分布関数の確率密度関数として，その $(x;y)$ に関するラプラス変換 g を考える．

$$\begin{aligned}g(\lambda;\xi;T) &:= \int_0^\infty\int_0^\infty e^{-\lambda x - \xi y}P(S_T \in dx; S_{min} \in dy) && (5.10)\\ &= \hat{E}\left[e^{-\lambda X_T - \xi X_{min}}\right] && (5.11)\end{aligned}$$

ここで $X_T = \sigma\hat{B}_T - \frac{1}{2}\sigma^2 T$ （ただし $\hat{B}$ は $\hat{P}$ の下での新 Brown 運動）であり，

$$e^{-\lambda X_t}e^{\frac{1}{2}(\sigma^2-(\lambda\sigma)^2)t} = e^{-\lambda\sigma X_t - \frac{1}{2}(\lambda\sigma)^2 t}: \tag{5.12}$$

は $\hat{P}$ の下で期待値 1 の指数型マルチンゲールになるので

$$\frac{dQ}{d\hat{P}} := e^{-\lambda X_T} e^{\frac{1}{2}(\sigma^2-(\lambda\sigma)^2)T} \tag{5.13}$$

によって新しい確率測度 Q を（時刻 T まで）定義することができる．このとき (5.10) は

$$g(\lambda;\xi;T) = e^{-\frac{1}{2}(\sigma^2-(\lambda\sigma)^2)T} E^Q\left[e^{-\xi X_{min}}\right] \tag{5.14}$$

となり，これはよく知られている量である．(cf. [1]) この $g(\lambda;\xi;T)$ を逆変換することによって求める同時分布を知ることができる．

この方法以外にもこの同時分布を知る方法はたくさんあり，今日までに結果もよく知られている．これについては X が標準ブラウン運動である場合には [10] [11, chapter 6] などが詳しい．

5.4 バリアーオプション

バリアーオプションの価格を求めるには，偏微分方程式 (5.3) にさらに境界条件を付け加えて解くのが最も単純である．たとえばダウン・アンド・アウト・コールオプションの場合，(5.3) に次のような境界条件を加えて解けばよい．S が期間中 k に到達するとオプションの権利が消滅するとすれば

$$f(k;t) = 0; \quad \forall t \in (0;T) \tag{5.15}$$

こういう偏微分方程式の基本解（グリーン関数) は，やはり反射壁のある拡散過程の確率密度関数になる．境界が片側だけにおかれている場合，正規分布の確率密度関数であらわすことができる．(cf.[10]) 両側に境界がある場合，固有値が離散的になるので解はフーリエ級数で表示される．この辺の事情はまったく通常の熱方程式と同様である．

5.5 アジア型オプション

アジア型オプションの場合，その価格 c は同値マルチンゲールの手法によればたとえば (アベレージ・ストライクと呼ばれるものの場合)

$$c = e^{-rT}\hat{E}\left[\max\left(\int_0^T S_t\,dt - S_T ; 0\right)\right]. \tag{5.16}$$

と表示される．この場合も $(\int_0^T S_t\,dt; S_T)$ の同時分布を知る必要がある (cf. [14])．

そこでさまざまな近似解法が提案されている．ひとつの解決策は，算術平均 $\int_0^T S_t dt$ のかわりに幾何平均 $\exp \int_0^T \log S_t\,dt$ を考えることである．S（の有限次元分布）が対数正規分布にしたがうとき，これは再び対数正規分布にしたがう．

アジア型オプションで pay-off が $\max(\int_0^T S_t\,dt - K; 0)$ で与えられるもの，つまり原資産を「平均価格」にとったオプションについてはそのプレミアムの価格は通常のオプションより安くなることがわかっている．

6 アメリカンオプション

アメリカンオプションとは，前節までに繰り返し述べているように，期間中にいつでも行使できるオプションのことである．実際の市場において取引されるオプションは，このアメリカンタイプがほとんどであるという．[9, p5] これの時価をもとめること，あるいはいいかえると無裁定価格をもとめることは，Black-Sholes のモデルを用いた場合，ヨーロピアン型と比べて格段に難しくなる． これは対応する偏微分方程式が，ヨーロピアン型の場合は線型であるのに対し，アメリカン型の場合，非線型[11]になってしまうからである．
今回はその方程式の導出と，近似解の様々な求め方についてを考察の対象とする．モデルとしては，ヨーロピアン型（あるいは前節のエキゾチック型）オプションの価格を求めるのに用いた Black-Scholes のものを採用することにする．つまり，原資産の時点 t (満期 T に対して $t \in [0; T]$) での価格 S_t が幾何ブラウン運動

[11]自由境界値問題とよばれるタイプの方程式になる．

$$S_t = S_0 \exp \text{½} \text{¾}B_t + \text{µ} \text{¹} \text{¡} \frac{1}{2}\text{¾}^2 \text{¶} t \text{¾} : \tag{6.1}$$

に従うものとする．ここで ¾; ¹ は $\frac{dS}{S}$ のそれぞれ標準偏差,（本来の確率でみた）平均，B は本来の確率測度に関する Wiener 過程である．これは確率微分方程式で記述すると

$$dS_t = \text{¹}S_t dt + \text{¾}S_t dB_t: \tag{6.2}$$

となるのであった．

また，前節までと同様に非危険資産の利子率は時間，確率に依存せず一定の r であるとする．

今回ここで問題にするのは，アメリカン型のコール／プットオプションのみとする．その pay-o® C (コール）P_u (プット) は行使する時刻を ¿ [12] として

$$C = \max(S_{\text{¿}} \text{ ¡ } K; 0) \tag{6.3}$$

$$P_u = \max(K \text{ ¡ } S_{\text{¿}}; 0) \tag{6.4}$$

であらわされる．ここで K は行使価格である．

7 格子近似

[13]なによりも問題になるのは，エキゾチックオプションの価格決定に用いられた同値マルチンゲールの手法が適用できるのかということである．1期間二項モデルを多期間に拡張する．その上でアメリカンコール／プットオプション[14]の「価格」がどうなるかを調べる．

7.1 1期間モデル

まず1期間モデルを図1のように与える．つまり1時点後の原資産価格 $S_i; i = 0; 1$[15] が確率 p で $S_1 = S_0$¢u に，確率 1 ¡ p で $S_1 = S_0$¢d にな

[12] マルコフ時間あるいは停止時刻 (stopping time) とよばれる確率変数である．

[13] 格子近似については [3] [9, chapter9,15] を参照するとよい．

[14] この1期間モデルではアメリカン型とヨーロピアン型の差はない．

[15] i は時刻を表わす変数である．以降のセクションでも同様とする．

るものとする．また，行使価格を $K = S_0 = S$ とし，$d < 1 < u$; つまり $Sd < K < Su$ であるとする．非危険資産の利子率が R であれば，コール (resp. プット) オプションの価格 f (resp. $\bar{f}$) は

$$
\begin{aligned}
f &= \frac{1}{1+R} p^*(Su - K) && (7.1)\\
\bar{f} &= \frac{1}{1+R} (1 - p^*)(K - Sd) && (7.2)
\end{aligned}
$$

で与えられる．ただしここで p^* は以下の関係式で与えられる「同値マルチンゲール」確率であった．すなわち

$$
p^* Su + (1 - p^*) Sd = (1+R) S_0 = (1+R) S. \qquad (7.3)
$$

この式から直ちに

$$
p^* = \frac{1 + R - d}{u - d} \qquad (7.4)
$$

を得る．

7.2　２期間モデル

　前節のモデルを多期間に拡張することを考えたいが，まずその第１ステップとして図２で与えられる２期間モデルを考える．このとき各ノードでの時価を f; $(i = 0)$; $f_u; f_d$; $(i = 1)$; $f_{uu}; f_{ud}; f_{dd}$; $(i = 2)$ であらわすことにする．行使価格および各ノードでの確率変動の条件は前節と同じであるとし，ここでさらに $ud \le 1$ という条件をさらに加える．するとコールオプション (pay-off は $\max(S_2 - K; 0)$) の場合は

$$
f_{uu} = S(u^2 - 1); \quad f_{ud} = f_{dd} = 0 \qquad (7.5)
$$

を得る．各ノードでのもろもろの条件は前節と同じなのであるから

$$
f_u = \frac{1}{1+R}(p^* f_{uu} + (1 - p^*) f_{ud}) = \frac{1}{1+R} p^* S(u^2 - 1); \qquad (7.6)
$$

$$
f_d = \frac{1}{1+R}(p^* f_{ud} + (1 - p^*) f_{dd}) = 0 \qquad (7.7)
$$

であり，

$$f = \frac{1}{1+R}(p^* f_u + (1 - p^*) f_d) = \frac{1}{(1+R)^2}(p^*)^2 S(u^2 - 1) \qquad (7.8)$$

となる．一方プットオプションの場合 (pay-off は $\max(K - S_2; 0)$)

$$f_{uu} = 0; \quad f_{ud} = S(1 - ud); \quad f_{dd} = S(1 - d^2) \qquad (7.9)$$

であるから $q^* := 1 - p^*$ として

$$f_u = \frac{1}{1+R}(p^* f_{uu} + q^* f_{ud}) = \frac{1}{1+R}(q^* S(1 - ud)); \qquad (7.10)$$

$$f_d = \frac{1}{1+R}(p^* f_{ud} + q^* f_{dd}) = \frac{1}{1+R}\left(p^* S(1 - ud) + q^*(1 - d^2)\right); \qquad (7.11)$$

$$f = \frac{1}{1+R}(p^* f_u + q^* f_d) \qquad (7.12)$$

となる．
ヨーロピアンオプションの場合はこれでよいが，アメリカンオプションの場合これらの計算で得られた各ノード (ただし $i = 1$) での時価と，その時点でオプションの権利を行使した場合に得られる収益を比較する必要がある．もし後者の値の方が大きいのであればその時点で行使すべきである．なぜならば，その収益をもって次の時点により大きい pay-off をもつ戦略＝ポートフォリオを構成することができる[16]からである．これはやはり無裁定の議論に基づいた考え方である．
よってアメリカンオプションの各ノードでの時価を^をつけてあらわすことにすると，$\hat{f}_{uu} = f_{uu}; \hat{f}_{ud} = f_{ud}; \hat{f}_{dd} = f_{dd}$ であり，コールオプションの場合

$$\hat{f}_u = \max(S(u - 1); f_u) \qquad (7.13)$$

$$\hat{f}_d = f_d \qquad (7.14)$$

$$\hat{f} = \frac{1}{1+R}(p^* \hat{f}_u + q^* \hat{f}_u) \qquad (7.15)$$

[16]あるいはその収益分ヨーロピアンタイプのオプションを購入する

で価格が決定される．また，プットオプションの場合は

$$
\begin{aligned}
\hat{f}_u &= f_u && (7.16)\\
\hat{f}_d &= \max(S(1-d); f_d) && (7.17)\\
\hat{f} &= \frac{1}{1+R}(p^*\hat{f}_u + q^*\hat{f}_u) && (7.18)
\end{aligned}
$$

となる．コールオプションの場合 7.6 によって f_u が与えられるので

$$
\begin{aligned}
f_u - S(u-1) &= \frac{1}{1+R}p^*S(u^2-1) - S(u-1)\\
&= \frac{S(u-1)}{(1+R)(u-d)}\{(1+R)(1+d) - d(1+u)\}
\end{aligned}
\qquad (7.19)
$$

となり，$ud \leq 1$ のときこの値は常に正となる．これはアメリカンコールオプションとヨーロピアンコールオプションの価格は一致するということを意味する．後述するように実際上 $ud = 1$ としないと近似計算が難しくなるのだが，これは本質的にヨーロピアンコールとアメリカンコールの価格が一致するということに対応している．

7.3 多期間モデル

つぎに図３のような多期間モデルを考える．ヨーロピアンオプションの時価の計算は２期間モデルの場合の単純な拡張で計算ができるが，アメリカンオプションの場合は多少手を加えなければならない．具体的にいうと，単純にすべてのノードでヨーロピアンの時価と（早期）行使をして得られる収益を比較する，のではなく，期間最終時点から帰納的にこの比較をおこなっていかなければならないのである．これを解説する前にまず，連続モデル (Black-Scholes モデル) の離散近似として多期間モデルを捉えることを考える．言い換えると，期間の数を無限大に増やしたとき，それに対応する適当なスケール変換を施すと極限が Black-Scholes モデル になるようにしたいということである．

7.3.1 Black-Scholes モデルへの収束

まず期間数を N とし，連続モデルの満期 T に対し，$\Delta t := \frac{T}{N}$ とおく．(6.2) の各変数に対しては

$$
\begin{aligned}
R &= e^{r\Delta t} - 1 && (7.20)\\
u &= e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} && (7.21)\\
d &= e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} && (7.22)
\end{aligned}
$$

とする．ここで $ud = 1$ としていることに注意．ここでこの離散モデルの第 n ステップでの原資産の価格を S_n^N であらわすことにし， $X_i^N; i = 1, \ldots, N-1$ を $\hat{P}^N(X_i = 1) = p^*$; $\hat{P}^N(X_i^N = -1) = 1 - p^*$ に従う独立で同分布な確率変数の列とすると $S_0^N = S$ として

$$
\begin{aligned}
S_n^N &= S\prod_{i=1}^{n} e^{X_i\sigma\sqrt{\Delta t}}\\
&= Se^{\sigma\sqrt{\Delta t}\sum_{i=1}^{n} X_i^N}; \quad n = 1, \ldots, N
\end{aligned}
\qquad (7.23)
$$

であるから

$$\log\frac{S_n^N}{S} = \sigma\sqrt{\Delta t}\sum_{i=1} X_i^N \qquad (7.24)$$

となる．また，$t \in [(n-1)\Delta t, n\Delta t)$ に対し $S_t^N := aS_{n-1}^N + (1-a)S_n^N$ とおく．ただし $a = \frac{t}{\Delta t} - (n-1)$ である．[17]
今 S_t^N の $N \to \infty$ での極限分布を知りたいが，ここでは確率論や統計学でよく知られた「中心極限定理」をうまく利用することによって $\log\frac{S_t^\infty}{S} \sim N((r-\sigma^2)t, \sigma^2 t)$ となることがわかる．もっと強い意味の収束，すなわち幾何ブラウン運動の同値マルチンゲール測度への収束もいえて，それは格子近似によって得られた価格が，ヨーロピアン／アメリカンの区別なく，期間数を増やせばより正しい価格が得られることを保証する．

7.3.2 コールオプションについての注意

アメリカンコールオプションの価格については注意が必要である．２期間モデルの考察において見たように，$ud = 1$ の場合はアメリカンとヨーロピアンの時価は一致するのであった．これが各ノードについてすべてい

[17] これによって，折れ線による連続な確率過程を構成したことになる．

えるのであるから結局多期間モデルでもやはりこの二つの商品の価格は一致する．すると前節の議論によって，極限として得られる Black-Sholes モデルにおいてもこの二つの商品の価格は一致する．これはアジア型コールオプションの価格がヨーロピアン型のそれより安くなるということを証明する際に用いた劣マルチンゲール性と，任意抽出定理と呼ばれる数学的事実からも証明できる．

7.4　アメリカンオプションの価格

ここでは多期間モデル（期間数を N としておく）におけるアメリカンオプションの価格の求め方を整理する．オプションの pay-off は $f(S_\tau)$ であるとしておく．ここでは $ud = 1$ であるとし，さらに簡単のため $u = S$ としておく．

まず 1 期間で考えたときのオプション価格を，その時点での原資産価格を x として $V(x)$ であらわす．つまり

$$V^* f(x) = \frac{1}{1+R}\left(p^* f(xu) + (1-p^*) f\left(\frac{x}{u}\right)\right) \tag{7.25}$$

である．また

$$Q^* f(x) = \max(f(x), V^* f(x)) \tag{7.26}$$

とおく．ただし $Q^*g = \max(f, V^*g)$ である．するとアメリカンオプションの時点 n での時価 C_n はやはりその時点での原資産価格を x として

$$C_n = C_{N-n}(x) = Q^{N-n} {}^* f(x) \tag{7.27}$$

で得られる．とくに時点 0 での価格 C は

$$C = C_0 = C_N(x) = Q^N {}^* f(x) \tag{7.28}$$

である．ここで Q^k は Q の k 回の合成を表わす．あるいは

$$C_n(x) = \max(f(x), V^* C_{n-1}(x)) \tag{7.29}$$

である．これは現在の計算機の性能を考えれば，十分大きい N に対しても十分早く計算できるであろう．

(7.28) は同値マルチンゲール測度の観点からは

$$C_N(x) = Q^N * f(x) = \sup_{0\le\tau\le N} E_x^*[e^{-\tau} f(S_\tau)] \tag{7.30}$$

と書ける．ここで sup は $0 \le \tau \le N$ を満たすすべてのマルコフ時間でとる．[6, chapter 3]. この関係式の類似は連続モデルでも成立する [13]. それと対応する偏微分方程式は自由境界値問題と呼ばれるタイプのものになる．[6, chapter 7] 具体的には

$$(u(x;t) - f(x))\left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + rx\frac{\partial u}{\partial x} - ru\right) = 0; \quad t \le T \tag{7.31}$$

$$u(x;T) = f(x); \tag{7.32}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + rx\frac{\partial u}{\partial x} - ru \le 0; \tag{7.33}$$

$$u(x;t) - f(x) \ge 0. \tag{7.34}$$

である．

参考文献

[1] Akahori, J., “Some formulae for a new type of path-dependent option.” Annals of Applied Probability, 5, (1995).

[2] Carr, P., and R. Jarrow, “The stop-loss start-gain paradox and option valuation: a new decomposition into intrinsic and time value.” Review of Financial Studies 3, 469–492, 1990.

[3] Cox, J., S. Ross, and M. Rubinstein, “Option pricing: a simplified approach.” Journal of Financial Economics, 7, 229–264, 1979.

[4] Delbaen, F., and W. Schachermayer, “A general version of the fundamental theorem of asset pricing.” Mathematische Annalen 300, 463–520, (1994).

[5] Du±e, D., Futures Market. Prentice-Hal, 1989.

[6] Du±e, D., Dynamic Asset Pricing Theory, Princeton University Press, Princeton, NJ. 1992.

[7] Harrison, J.M., and D. Kreps, \Martingales and arbitrage in multi-period securities market." Journal of Economic Theory 20, 381{408, 1979.

[8] Harrison, J.M., and S. Pliska, \Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading." Stochastic Processes and Their Application 11, 215{260, 1981.

[9] Hull, J., Options, Futures, and Other Derivatives., 3rd Edition, Prentice-Hall, 1997.

[10] Itô, K., and H. P. McKean, Di®usion Processes and their sample paths., Springer{Verlag, 1965.

[11] Karatzas, I. and S. E. Shereve, Brownian Motion and Stochastic Calculus., Springer{Verlag, 1988.

[12] Revuz, D., and M. Yor, Continuous Martingales and Brownian Motion. 2nd edition, Springer{Verlag, 1994.

[13] Shiryaev, A. N., Yu. M. Kabanov, O. D. Kramkov, and A. V. Mel'nikov, \Toward the theory of pricing of options of both European and Amerikan types. (I. Discrete time, II. Continuous time.) " Theory Probab. Appl. (Translated from Russian Journal), 39, 14{102, 1994.

[14] Yor, M. \On some exponential functionals of Brownian motion.", 1991. Adv. in Appl. Probab. 24, 509{531, 1992.

[15] 赤堀 次郎, Hedging Forward contracts by Futures, simple cases. (in Japanese: 邦題「フォワード契約のヘッジ戦略の構成について」) MTEC journal, 11: 66-74, (1998), MTB Investment of Technology.